SOLUCIONES DISTRIBUCIONALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Comunicación efectuada
por el Académico Titular Dr. Julio H. G. Olivera
en la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires,
sesión plenaria del 27 de septiembre de 2010

SOLUCIONES DISTRIBUCIONALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Dr. Julio H. G. Olivera

Resumen

Con un adecuado conjunto de índices A, el espacio $(C^\infty [-1, 1])^A$ es linealmente homeomorfo al espacio de distribuciones o funciones generalizadas D′. Identificando cada distribución con el correspondiente vector de $(C^\infty [-1, 1])^A$, la multiplicación usual de funciones y la derivación vectorial se transfieren a D′. El espacio de distribuciones deviene así un anillo de diferenciación, al cual la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias se extiende de modo inmediato.

Abstract

Distributional solutions of ordinary differential equations

With an adequate index set A, the space $(C^\infty [-1, 1])^A$ is linearly homeomorphic to the space D′ of distributions or generalized functions. If each distribution is identified with the corresponding vector in $(C^\infty [-1, 1])^A$, the usual multiplication of functions and the vector derivation carry over to D′. The space of distributions thus becomes a differentiation ring, to which the theory of ordinary differential equations extends immediately.

I. **Introducción**

En términos algebraicos, una derivación D de un anillo R es una aplicación lineal D: R→R de R en sí mismo que satisface las reglas usuales de las derivadas: D (x+y) = Dx+Dy, D(xy) = xDy + yDx (v. [5] o [6]).

Consideremos el espacio-producto $(C^\infty [-1, 1])^A$, donde $C^\infty [-1, 1]$ es el espacio de funciones de valor complejo infinitamente diferenciables en el intervalo real [–1, 1]. Para un apropiado conjunto de índices A, el espacio $(C^\infty [-1, 1])^A$ es topológicamente isomorfo al espacio de distribuciones o funciones generalizadas D′, en el que induce la multiplicación ordinaria de funciones ([7]).

Dado un elemento $g \in (C^\infty[-1, 1])^A$, la derivada vectorial de orden n se define por

$$g^{(n)}(t) := (g_i^{(n)}(t)),\ i \in A;$$

es decir, la derivada de orden n de g es el vector cuyos componentes son las derivadas de orden n de los componentes de g. La derivada definida de este modo en el anillo de funciones $(C^\infty[-1, 1])^A$ constituye una derivación desde el punto de vista algebraico.

Identificando g y $g^{(n)}$ con sus imágenes en el espacio isomorfo D′, la derivación vectorial se transfiere a las funciones generalizadas. Los párrafos siguientes describen algunas importantes consecuencias de este hecho en el ámbito de las ecuaciones diferenciales.

2. **Proposiciones**

Sea la ecuación diferencial no homogénea

$$\frac{dg}{dt} = f,$$

donde f denota una distribución. Formulamos las preguntas clásicas: existencia, unicidad y dependencia continua de la solución con respecto a los datos. Las respuestas se obtienen aplicando a cada espacio-factor $C^\infty[-1, 1]$ la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, tal como se halla expuesta por ejemplo en [1].

TEOREMA 1 (Existencia). Para cualquier distribución f la ecuación diferencial precedente posee solución en el espacio D′.

TEOREMA 2 (Unicidad). Sean g y h dos soluciones de la ecuación diferencial considerada. Si $g(t) = h(t)$ en un punto del segmento $[-1, 1]$, entonces $g=h$.

TEOREMA 3 (Continuidad). La solución g depende en forma continua tanto de f cuanto de la condición inicial $g(t_o) = x_o$.

Puesto que los espacios de distribuciones E′ y S′ admiten la descripción $(C^\infty[-1, 1])^A$ con adecuados índices A, podemos agregar una propiedad complementaria:

TEOREMA 4 . Si f es una distribución con soporte compacto o de crecimiento lento, los teoremas anteriores se aplican a E′ y S′ respectivamente.

3. **Observaciones**

1) Cada $g_i^{(n)}$, $i \in A$, coincide con la derivada distribucional de orden n de g_i, relación que se extiende a $g^{(n)}$ por el atributo de continuidad (v. [4]) inherente a la derivada distribucional.

2) De la observación que antecede se deduce que el teorema 1 implica el teorema de Gel′fand-Shilov sobre la existencia de solución en D′ ([4]), y que el teorema 4 implica los teoremas de Bremermann sobre la existencia de solución en E′ y S′ ([2]).

3) Siendo el sistema en consideración "totalmente acotado" (cf. [3]) los teoremas 2 y 3 significan que la solución de equilibrio es siempre estable en el sentido de Liapunov.

Referencias

[1] V. J. Arnol′d, *Ordinary Differential Equations*, transl. R. Cooke, Berlín, 1992.

[2] H. Bremermann, *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms*, Reading (Massachusetts), 1965.

[3] R. Conti, M. Galeotti, Totally bounded differential polynomial systems in R^2, *Rend. Mat. Acc. Lincei*, s. 9 v. 13 (2002), 91-99.

[4] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions: Volume I, Properties and Operations*, transl. E. Saletan, New York, 1964.

[5] R. Godement, *Cours d'algèbre*, París, 1963.

[6] S. Lang, *Algebra*, Reading (Massachusetts), 1965.

[7] J. H. G. Olivera, Álgebras distribucionales funcionalmente continuas, *An. Acad. Ciencias de Buenos Aires*, 52 (2008) 109-114.